Boolean algebra laws

Nayuki Minase 2012-05-10

http://nayuki.eigenstate.org/page/boolean-algebra-laws

0 Notation

The following notation is used for Boolean algebra on this page, which is the electrical engineering notation:

False	0
True	1
NOT x	$\bar{x}$
x AND y	$x \cdot y$
x OR y	$x + y$
x XOR y	$x \oplus y$

The precedence is
AND (high), XOR (medium), OR (low).

Examples:

$x + y \cdot z$	means	$x + (y \cdot z)$
$x \oplus y \cdot z$	means	$x \oplus (y \cdot z)$
$x + y \oplus z$	means	$x + (y \oplus z)$

1 Basic laws

1.0 Constants

NOT:	AND:	OR:	XOR:
$\bar{0} = 1$	$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	$0 \oplus 0 = 0$
$\bar{1} = 0$	$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$0 \oplus 1 = 1$
	$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$1 \oplus 0 = 1$
	$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	$1 \oplus 1 = 0$

1.1 Constant and variable

NOT:	AND:	OR:	XOR:
(None)	$0 \cdot x = 0$	$0 + x = x$	$0 \oplus x = x$
	$1 \cdot x = x$	$1 + x = 1$	$1 \oplus x = \bar{x}$

1.2 One variable

NOT:	AND:	OR:	XOR:
$\bar{\bar{x}} = x$	$x \cdot x = x$	$x + x = x$	$x \oplus x = 0$
	$x \cdot \bar{x} = 0$	$x + \bar{x} = 1$	$x \oplus \bar{x} = 1$

1.3 XOR

XOR can be defined in terms of AND, OR, NOT:

$$x \oplus y = (x \cdot \bar{y}) + (\bar{x} \cdot y)$$
$$x \oplus y = (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$$
$$x \oplus y = (x + y) \cdot \overline{(x \cdot y)}$$

1.4 Various

	Commutativity	Associativity	Distributivity
AND	$x \cdot y = y \cdot x$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
OR	$x + y = y + x$	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
XOR	$x \oplus y = y \oplus x$	$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$	$x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$

1.5 De Morgan's laws

NAND	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
NOR	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

2 Redundancy laws

The following laws will be proved with the basic laws.
Counterintuitively, it is sometimes necessary to complicate the formula before simplifying it.

2.0 Absorption

$x + x \cdot y = x$

Proof:

$x + x \cdot y$
$= x \cdot 1 + x \cdot y$
$= x \cdot (1 + y)$
$= x \cdot 1$
$= x$

$x \cdot (x + y) = x$

Proof:

$x \cdot (x + y)$
$= (x + 0) \cdot (x + y)$
$= x + (0 \cdot y)$
$= x + 0$
$= x$

2.1 *(No name)*

$x + \bar{x} \cdot y = x + y$

Proof:

$x + \bar{x} \cdot y$
$= (x + \bar{x}) \cdot (x + y)$
$= 1 \cdot (x + y)$
$= x + y$

$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$

Proof:

$x \cdot (\bar{x} + y)$
$= x \cdot \bar{x} + x \cdot y$
$= 0 + x \cdot y$
$= x \cdot y$

$x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$

Proof:

$x \cdot y + x \cdot \bar{y}$
$= x \cdot (y + \bar{y})$
$= x \cdot 1$
$= x$

$(x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$

Proof:

$(x + y) \cdot (x + \bar{y})$
$= x + (y \cdot \bar{y})$
$= x + 0$
$= x$

2.2 Consensus

$x \cdot y + \bar{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \bar{x} \cdot z$

Proof:

$x \cdot y + \bar{x} \cdot z + y \cdot z$
$= x \cdot y + \bar{x} \cdot z + 1 \cdot y \cdot z$
$= x \cdot y + \bar{x} \cdot z + (x + \bar{x}) \cdot y \cdot z$
$= x \cdot y + \bar{x} \cdot z + x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z$
$= x \cdot y + x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z$
$= x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot 1 \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z$
$= x \cdot y \cdot (1 + z) + \bar{x} \cdot z \cdot (1 + y)$
$= x \cdot y \cdot 1 + \bar{x} \cdot z \cdot 1$
$= x \cdot y + \bar{x} \cdot z$

$(x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$

Proof:

$(x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z)$
$= (x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (0 + y + z)$
$= (x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (x \cdot \bar{x} + y + z)$
$= (x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (x + y + z) \cdot (\bar{x} + y + z)$
$= (x + y) \cdot (x + y + z) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (\bar{x} + y + z)$
$= (x + y + 0) \cdot (x + y + z) \cdot (\bar{x} + 0 + z) \cdot (\bar{x} + y + z)$
$= (x + y + 0 \cdot z) \cdot (\bar{x} + z + 0 \cdot y)$
$= (x + y + 0) \cdot (\bar{x} + z + 0)$
$= (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$